Lineaire Algebra 1

15 p

1 (a) $Ax = b$ heeft een unieke oplossing als $\det(A) \neq 0 \rightarrow A$ is dan niet-singulier $\rightarrow x = A^{-1} \cdot b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2k \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ontwikkelen 1e kolom:)

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + k \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

geeft:

$$0 = 2 + 0 + k(4k - 6)$$
$$0 = 4k^2 - 6k + 2$$
$$0 = k^2 - 1\tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}$$
$$0 = (k-1)(k-\tfrac{1}{2})$$
$$k = 1 \lor k = \tfrac{1}{2}$$

Dus: $Ax = b$ heeft een unieke oplossing als $k \neq 1$ & $k \neq \frac{1}{2}$ met $k \in \mathbb{R}$

(b) Er blijft over $k = 1 \lor k = \frac{1}{2}$

De vergelijking is strijdig als $\underline{k = 1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \neq -1 \rightarrow \text{Strijdig.}$$

(c) Er zijn oneindig veel oplossingen als $\underline{k = \frac{1}{2}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \alpha \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 2 - 4\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \text{oneindig veel oplossingen.}$$

2 (a) $\overset{M\times N}{A}\overset{N}{x} = \overset{M}{b}$ $\quad K = \{x \mid Ax = b\}$

$N(A) = \{x \mid Ax = 0\}$

3 $\quad R(A) = \text{kolomruimte } A = Ax$

$N(A)$ deelruimte?

i $\quad N(A) \neq \emptyset$ want $\bar{x} = \bar{0}$ is een oplossing van $A\bar{x} = \bar{0}$ ☑

ii $\quad \bar{x} \in N(A)$, $\bar{y} \in N(A) \Rightarrow A\bar{x} = 0$ & $A\bar{y} = 0$

$\bar{x} + \bar{y} \overset{?}{\in} N(A)$

$$A(x+y) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \quad ☑$$

iii $\quad \bar{x} \in N(A)$, $\alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow A\bar{x} = 0$

$\alpha\bar{x} \overset{?}{\in} N(A)$

$$A(\alpha\bar{x}) = (A\alpha)\bar{x} = \alpha(A\bar{x}) = \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0} \quad ☑$$

$N(A)$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^N$ ☑

(b) i $\quad Ax = \bar{a}_1 \cdot x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \ldots \bar{a}_N x_N$.

4 $\quad$ Dit is de kolomruimte van A:

$$Ax = b \Longrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{M2} \end{pmatrix} + \ldots + x_N \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

b is dus de som van de kolommen vermenigvuldigd met x_i, $i = 1, 2 \ldots N$. b kan dus alléén gevormd worden dmv een $\bar{x}$ als b in de kolomruimte van A zit. Dwz: $b \in R(A)$

ii $\quad$ Als $b \notin R(A) \longrightarrow b \neq x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{M2} \end{pmatrix} + \ldots + x_N \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{pmatrix}$

$\bar{x}$ is dan géén oplossing:

$\longrightarrow K = \emptyset$

Lineaire Algebra 1

(c) $v \in K \rightarrow A \cdot v = b$

2 Te bewijzen: $K = \{v + \omega \mid \omega \in N(A)\}$

: $A(v+\omega) \overset{?}{=} b$ met $\omega \in N(A)$

Bewijs: $A(v+\omega) = Av + A\omega$

- Omdat $\omega \in N(A)$ geldt: $A\omega = \bar{0}$;

Dus: $A(v+\omega) = Av + \bar{0} = Av$

- Omdat $v \in K$ geldt $Av = b$

Dus: $A(v+\omega) = b$ met $\omega \in N(A)$. $\boxed{\checkmark}$

(d) Nee; Voor een deelruimte moet gelden dat voor

2 een willekeurige $\bar{x}$ en $\bar{y} \in K$ ~~moet~~ ook

$\bar{x} + \bar{y} \in K$ is. Eén tegenvoorbeeld is voldoende

om te bewijzen dat dit niet zo is.

i $K \neq \phi$ want $v \in K$ (zie c) $\boxed{\checkmark}$

ii $\bar{x} \in K$, $\bar{y} \in K \Longrightarrow A\bar{x} = b$ & $A\bar{y} = b$

$\bar{x} + \bar{y} \overset{?}{\in} K$

$A(\bar{x}+\bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = b + b = 2b \neq b$ $\boxed{\times}$

iii $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in K \rightarrow A\bar{x} = b$

$\alpha\bar{x} \overset{?}{\in} K$

$A(\alpha\bar{x}) = \alpha(A\bar{x}) = \alpha b \neq b$ $\boxed{\times}$

K is géén deelruimte van $\mathbb{R}^n$

Alleen als $b = 0$, dus $N(A)$.

3 $T(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) i $T(M+N) \overset{?}{=} T(M) + T(N) \qquad M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

5

$$T(M+N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(M+N) - (M+N)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N - M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N - N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= T(M) + T(N) \qquad \boxed{\checkmark}$$

ii $T(\alpha M) \overset{?}{=} \alpha T(M) \qquad M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\alpha M) - (\alpha M)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - \alpha \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha T(M) \qquad \boxed{\checkmark}$$

T is een lineaire afbeelding.

(b) $\ker(T) = \{M \mid T(M) = 0\}$ & $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

4

Dus: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} m_{21} & m_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & m_{11} \\ 0 & m_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{21} & m_{22} - m_{11} \\ 0 & -m_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ geeft:}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{21} = 0 \\ m_{22} = m_{11} = \alpha \\ m_{12} = \beta \end{array}\right\} \ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

(c) $\ker(T) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5

Basis $\ker(T)$ is $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

4 (a) i $T(p+q) \stackrel{?}{=} T(p) + T(q)$ $\qquad p, q \in P_3$

3

$T(p+q) = (p+q)' + (p+q)'' = p' + q' + p'' + q''$
$= (p' + p'') + (q' + q'')$
$= T(p) + T(q)$ $\boxed{\checkmark}$

ii $T(\alpha p) \stackrel{?}{=} \alpha T(p)$ $\qquad p \in P_3, \alpha \in \mathbb{R}$

$T(\alpha p) = (\alpha p)' + (\alpha p)'' = \alpha p' + \alpha p'' = \alpha(p' + p'')$
$= \alpha T(p)$ $\boxed{\checkmark}$

$\rightarrow$ T is een lineaire afbeelding.

4

(b) $\ker(T) = \{ P_3 \mid T(P_3) = 0 \}$

Dus: $p' + p'' = 0$
$p' = -p'' \rightarrow p'' = -p'$

Oplossingen zijn (1) $p' = p'' = 0$
$p = \text{Constante}$ $\Big\}$ $p \in \mathbb{R}$

(2) $p'' = -p'$
$\int p' = \int -p''$
$p = -p' + c$ $\Big\}$ geen oplossing, want p is altijd een graad hoger dan $-p' + c$ en kan er dus nooit gelijk aan zijn (bij polynomen)

Conclusie: $\ker(T) = c \in \mathbb{R}$

$P_3 = ax^2 + bx + c$ met $a = b = 0$
met $c \in \mathbb{R}$

(c) range $T(P_3)$ van T:

~~1~~ 2

$$T(ax^2+bx+c) = \{ \underbrace{(2ax+b) + (2a)}_{\text{range van } T(P_3)} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

-2

(d) $T(1) = 0 + 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

4 $T(x) = 1 + 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$T(x^2) = 2x + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 $\overset{m\times n}{A}\,\overset{n}{x} = \overset{n}{b}$

- $R(A)$ is kolomruimte van A
- $A^T A \hat{x} = A^T \cdot b$

(a) $A^T A \hat{x} = A^T b$

1 Te bewijzen: $b - A\hat{x} \perp R(A)$

Bewijs: ~~$b - A\hat{x}$~~ • als het skalair product $(b - A\hat{x})^T \cdot A\hat{x}$ gelijk aan 0 is, staat $(b - A\hat{x}) \perp A\hat{x}$ ← niet willekeurig

• Omdat $A\hat{x} \in R(A)$ geldt dan ook: $(b - A\hat{x}) \perp R(A)$

$$(b - A\hat{x})^T \cdot A\hat{x} = (b^T - (A\hat{x})^T) \cdot A\hat{x} = (b^T - \hat{x}^T A^T) \cdot A \cdot \hat{x} = b^T A \hat{x} - \hat{x}^T \cdot \underbrace{A^T \cdot A \cdot \hat{x}}_{A^T \cdot b}$$

$$= b^T (A\hat{x}) - \hat{x}^T A^T \cdot b = b^T (A\hat{x}) - (A\hat{x})^T b$$

$$= (b_1 \dots b_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \hat{x} \\ \vdots \\ \vec{A}_m \hat{x} \end{pmatrix} - (\vec{A}_1 \hat{x} \dots \vec{A}_m \hat{x}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$= b_1 \cdot \vec{A}_1 \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} + \dots + b_m \cdot \vec{A}_m \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} - \left(\vec{A}_1 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \cdot b_1 + \dots + \vec{A}_m \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \cdot b_m \right)$$

$= 0$ qed

niet gelijke grootte.

Dus: $b - A\hat{x} \perp R(A)$

~~4~~ Vraag 5

(b) • $N(A) = \{0\} \Rightarrow Ax = 0$ heeft alléén $\bar{x} = \bar{0}$ als oplossing

• A^TA niet-singulier $\Longleftrightarrow A^TA\bar{x} = \bar{0}$ heeft alléén $\bar{x} = \bar{0}$ als oplossing

Bewijs: $A \neq 0$, dus $A^T \neq 0^T$ (anders had $Ax=0$ oneindig veel oplossingen)

dus $A^T \cdot Ax = 0$ alleen als óf $A^TA = 0$ óf als $\bar{x} = \bar{0}$ Nee!

Echter: $A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{M1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1N} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} a_{i1}^2 & \times & \times \\ \times & \ddots & \times \\ \times & \times & \sum_{i=1}^{M} a_{iN}^2 \end{pmatrix} \neq 0$ want $A \neq 0$

Er is minstens 1 $a_{ij} \neq 0$
Dus minstens 1 $\sum a_{ij}^2 \neq 0$

diagonaal

Conclusie: $\bar{x} = \bar{0}$; A^TA is niet-singulier!

(c) • Orthogonale projectie van b op $R(A)$ is $A\hat{x} = p$ (pythagoras?)

• $N(A) = \{0\}$, dus $(A^TA)^{-1}$ bestaat; $A^TA\hat{x} = A^Tb$

• Dus $p = A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^Tb$ $\boxed{}$ $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

6 (a) $Ax = \lambda x$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I$$

15p!

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ (ontwikkelen naar 1^{ste} rij)

8

$= -\lambda(\lambda^2 - 4) \longrightarrow$ karakteristieke polynoom van A

(b) eigenwaarden: $p(\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -2$

8

$\lambda = 0 \vee \lambda^2 - 4 = 0$
$\lambda^2 = 4$
$\lambda = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

(c) $\lambda_1 = 0$ geeft $Ax = 0x = \bar{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -4x_3 = -4\alpha \end{array} \Bigg\} \bar{x} = \begin{pmatrix} -4\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eigenvector bij $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \qquad (A-\lambda I)x = 0$ geeft

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_2 = 2x_3 = 2\alpha \\ x_1 = 0 \end{array}\right\} \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eigenvector bij $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -2 \qquad (A-\lambda I)x = 0$ geeft:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_2 = -2x_3 = -2\alpha \\ x_1 = 0 \end{array}\right\} \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eigenvector bij $\lambda_3 = -2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) A is diagonaliseerbaar als de eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn:

4

$$c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4c_1 \\ 2c_2 - 2c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } \left.\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = c_3 \\ c_2 = -c_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = c_2 = c_3 = 0 \\ \text{lineair onafhankelijk.} \end{array} \; \boxed{\checkmark}$$

Dus $T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: de eigenvectoren als kolommen

zodat $D = T^{-1} \cdot A \, T$ met $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$